KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY
STROJNÍCKEJ FAKULTY TU KOŠICE

PREHĽAD ZÁKLADNÝCH VZORCOV A VZŤAHOV ZO STREDOŠKOLSKEJ MATEMATIKY (POMÔCKA PRE PRÍPRAVNÝ KURZ)

2000

Základné algebraické vzorce

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Operácie s mocninami

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad a^m : a^n = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m \qquad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[n \cdot m]{a^m}}{\sqrt[n \cdot m]{b^n}} = \sqrt[n \cdot m]{\frac{a^m}{b^n}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^x = \sqrt[n]{a^{mx}} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

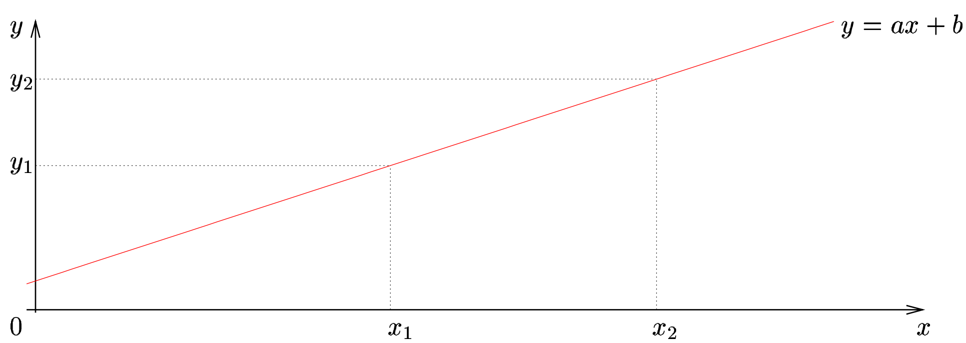
Elementárne funkcie

Konštantná funkcia – $\boxed{f:\ y = k,\ k \in \mathbb{R}}$ $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R},\ \mathcal{H}(f) = \{k\}$.

Grafom je priamka rovnobežná s osou x.

Lineárna funkcia – $\boxed{f:\ y = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0}$ $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R},\ \mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$.

Grafom je priamka so smernicou a, ktorá na osi y vytína úsek b.

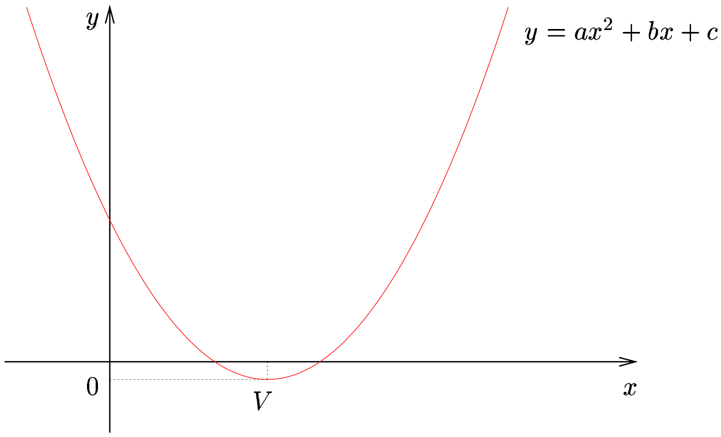


Kvadratická funkcia – $\boxed{f:\ y = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0}$

Grafom je parabola, ktorej os je rovnobežná s osou y.

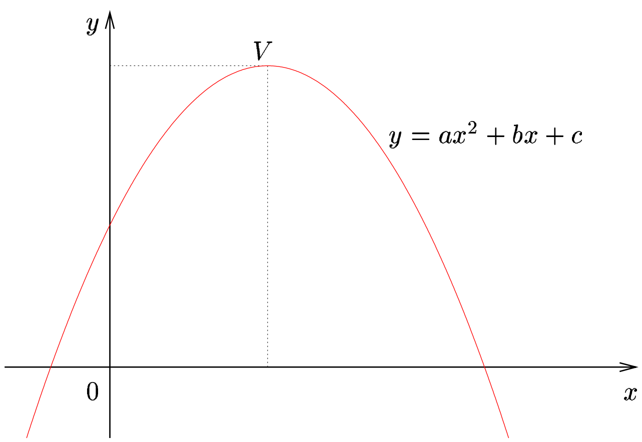
1) $a > 0$: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle c - \frac{b^2}{4a}; +\infty)$,

párna pre $b = 0$,
ohraničená zdola,
rastúca, prostá pre $x \in \langle -\frac{b}{2a}; +\infty)$,
klesajúca, prostá pre $x \in (-\infty; -\frac{b}{2a}\rangle$.



2) $a < 0$: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (-\infty; -\frac{b^2}{4a}\rangle$,

párna pre $b = 0$,
ohraničená zhora,
rastúca, prostá pre $x \in (-\infty; -\frac{b}{2a}\rangle$,
klesajúca, prostá pre $x \in \langle -\frac{b}{2a}; +\infty)$.

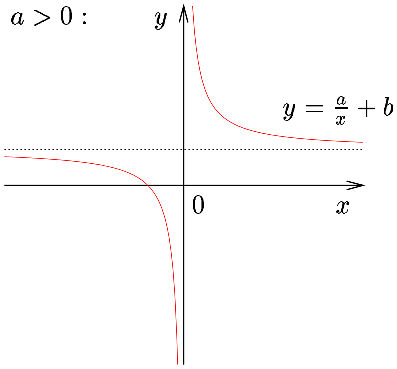


Nech x_1 a x_2 sú korene kvadratickej rovnice $ax^2+bx+c = 0$. Potom kvadratickú funkciu $y = ax^2 + bx + c$ môžeme vyjadriť v tvare $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

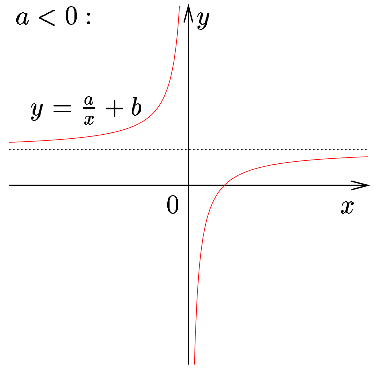
Hyperbolická funkcia – $\boxed{f:\ y = \dfrac{a}{x} + b,\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0}$

$\mathcal{D}(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $\mathcal{H}(f) = (-\infty; b) \cup (b; +\infty)$.
Grafom je rovnoosová hyperbola.

$a > 0:$

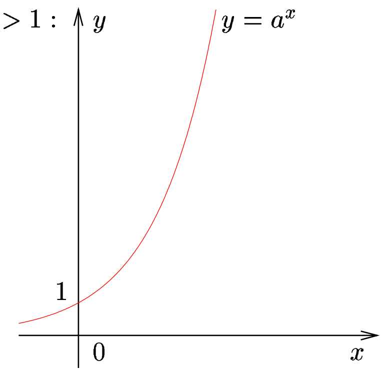


$a < 0:$

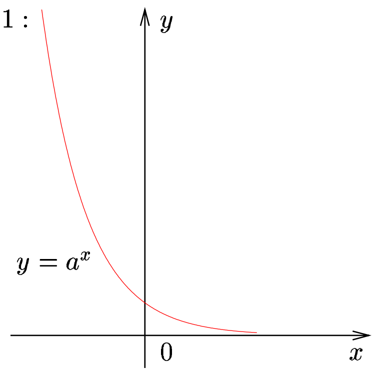


Exponenciálna funkcia – $\boxed{f:\ y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1}$
$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (0; +\infty)$.

$a > 1:$

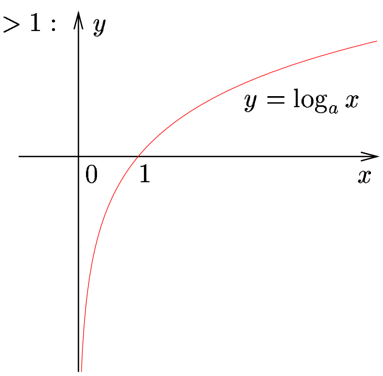


$0 < a < 1:$

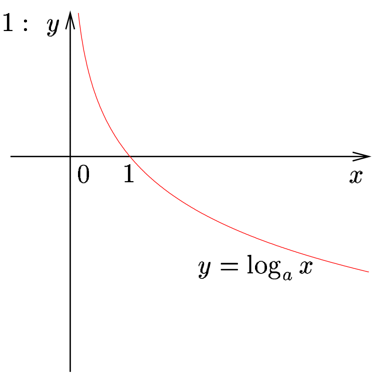


Logaritmická funkcia – $\boxed{f:\ y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1}$
$\mathcal{D}(f) = (0; +\infty)$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$.

$a > 1:$



$0 < a < 1:$



$\log x = \log_{10} x$ sa nazýva dekadickým logaritmom,
$\ln x = \log_e x$ sa nazýva prirodzeným logaritmom (kde $e = 2.718\ldots$ je Eulerovo číslo).

Vlastnosti logaritmov:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a 1 = 0$$

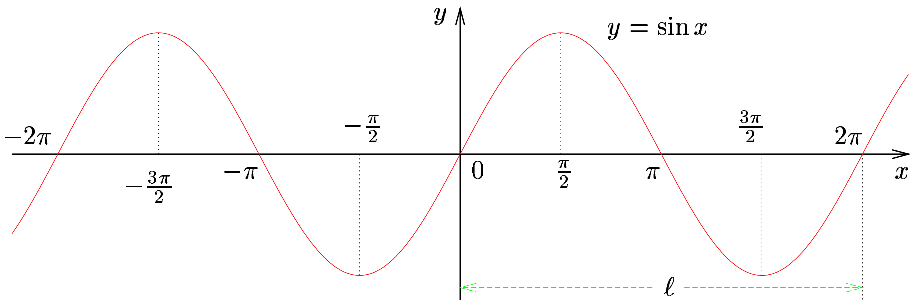
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad \log_a a = 1$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x \qquad \log_a x = \frac{\log_y x}{\log_y a}$$

Goniometrické funkcie

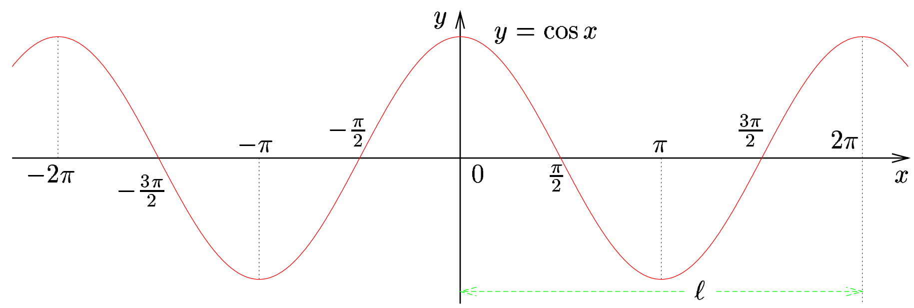
$\boxed{f:\ y = \sin x}$ $\quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R},\ \mathcal{H}(f) = \langle -1; 1\rangle.$

nepárna, preto: $\sin(-x) = -\sin x$,
ohraničená,
periodická s periódou $\ell = 2\pi$.



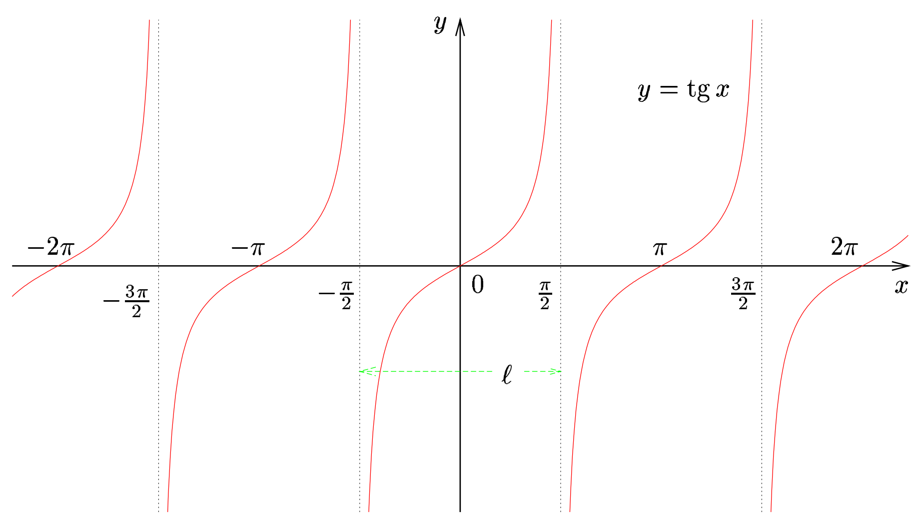
$\boxed{f:\ y = \cos x}$ $\quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R},\ \mathcal{H}(f) = \langle -1; 1\rangle,$

párna, preto $\cos(-x) = \cos x$,
ohraničená,
periodická s periódou $\ell = 2\pi$.



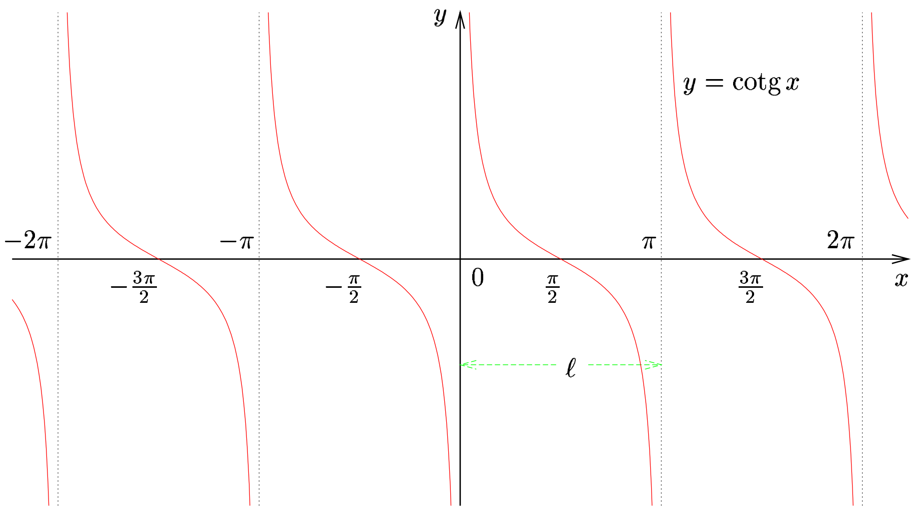
$\boxed{f:\ y = \operatorname{tg} x}$ $\quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi),$

$\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$,
nepárna, preto $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$,
rastúca na každom intervale $I \subset \mathcal{D}(f)$,
neohraničená,
periodická s periódou $\ell = \pi$.



$\boxed{f:\ y = \operatorname{cotg} x}$ $\quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi; (k+1)\pi)$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$,

nepárna, preto $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$,
klesajúca na každom intervale $I \subset \mathcal{D}(f)$,
neohraničená,
periodická s periódou $\ell = \pi$.



Znamienka goniometrických funkcií

Kvadrant	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$
I.	$+$	$+$	$+$	$+$
II.	$+$	$-$	$-$	$-$
III.	$-$	$-$	$+$	$+$
IV.	$-$	$+$	$-$	$-$

$\sin(90° - x) = \cos x$
$\cos(90° - x) = \sin x$

$\sin(90° + x) = \cos x$
$\cos(90° + x) = -\sin x$

Tabuľka základných hodnôt goniometrických funkcií

x	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0		0
$\operatorname{cotg} x$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$		0	

$1\,\text{radián} = \frac{180°}{\pi} \doteq 57°17'45''$ $\qquad 1° = \frac{\pi}{180} \doteq 0.0175$

Základné vzťahy medzi goniometrickými funkciami

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1 \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Súčtové vzorce

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y \qquad \operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y \qquad \operatorname{cotg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} y \pm \operatorname{cotg} x}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \qquad \operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} \qquad \operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \cdot \sin y}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x \cdot \sin y = \tfrac{1}{2} \cdot [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\cos x \cdot \cos y = \tfrac{1}{2} \cdot [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

$$\sin x \cdot \cos y = \tfrac{1}{2} \cdot [\sin(x-y) + \sin(x+y)]$$

Vzorce pre výpočet funkcií dvojnásobných a polovičných uhlov

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x}$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \qquad \operatorname{cotg} 2x = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2\operatorname{cotg} x} = \frac{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x}{2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \qquad \cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$$

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$|\cos x \pm \sin x| = \sqrt{1 \pm \sin 2x}$$

Kvadratické rovnice

Rovnica $\boxed{ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}}$ sa nazýva kvadratickou rovnicou vo všeobecnom tvare. Korene x_1, x_2 kvadratickej rovnice vypočítame zo vzťahu

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

kde $D = b^2 - 4ac$ sa nazýva diskriminant kvadratickej rovnice.

Ak $D > 0$, potom rovnica má dva rôzne reálne korene.
Ak $D = 0$, potom rovnica má jeden reálny dvojnásobný koreň:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Ak $D < 0$, potom rovnica má dva komplexne združené korene:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i \cdot \sqrt{|D|}}{2a},$$

kde i je imaginárna jednotka.
Ak x_1, x_2 sú korene kvadratickej rovnice, potom tzv. rozklad na súčin koreňových činiteľov má tvar

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Ak $a = 1, b = p, c = q$, dostaneme normovanú kvadratickú rovnicu:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Pre jej korene platí:

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Absolútna hodnota

Absolútna hodnota reálneho čísla je definovaná takto:

1) ak $a \geq 0$, potom $|a| = a$,
2) ak $a < 0$, potom $|a| = -a$.

Vlastnosti absolútnej hodnoty:

a) $|a| \geq 0$,
b) $|-a| = |a|$,
c) $-|a| \leq a \leq |a|$,
d) $|a + b| \leq |a| + |b|$,
e) $|ab| = |a| \cdot |b|$,
f) $\sqrt{a^2} = |a|$,
g) $(|a| < k) \;\Leftrightarrow\; (-k < a < k) \;\Leftrightarrow\; (a \in (-k; k))$.

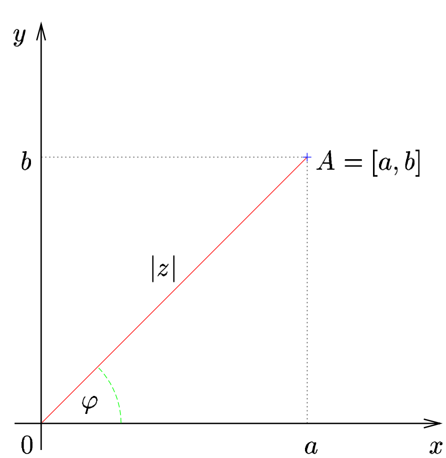
Komplexné čísla

Každé komplexné číslo sa dá zapísať v tvare $z = a + bi$, kde a je reálna časť, b je imaginárna časť komplexného čísla, i je imaginárna jednotka, pre ktorú platí $i^2 = -1$.

Nech $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ sú komplexné čísla. Potom

a) súčet $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$,
b) rozdiel $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$,
c) súčin $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$,
d) podiel $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)}$; $c + di \neq 0$; $c - di$ je komplexne združené číslo ku z_2.

Znázornenie komplexného čísla $z = a + bi$ vektorom $\overline{OA}$:



Absolútna hodnota komplexného čísla je $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

$\cos\varphi = \dfrac{a}{|z|} \;\Rightarrow\; a = |z|\cdot\cos\varphi$ $\qquad\qquad$ $\sin\varphi = \dfrac{b}{|z|} \;\Rightarrow\; b = |z|\cdot\sin\varphi$

Po dosadení do algebraického tvaru komplexného čísla $z = a+bi$ dostaneme goniometrický tvar $z = |z|\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$. Platí Eulerov vzťah:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\cdot\sin\varphi.$$

Analytická geometria v rovine

Nech sú dané dva body $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$. Potom ich **vzdialenosť** je

$$|AB| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}$$

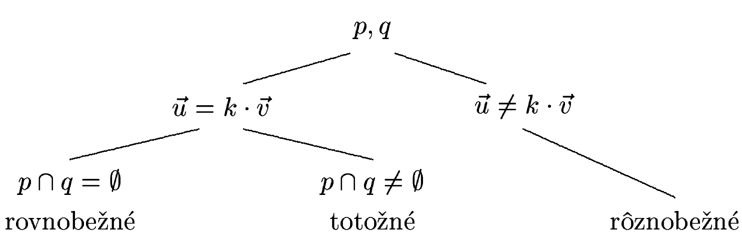
a **stred úsečky** AB je

$$S = \left[\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right].$$

Rovnice priamky:

1) **parametrické** rovnice –
priamka určená bodom $A = [a_1, a_2]$ a smerovým vektorom $\vec{u} = (u_1, u_2)$:
$x = a_1 + t\cdot u_1$,
$y = a_2 + t\cdot u_2,\ t\in\mathbb{R}$,
2) **všeobecný tvar** rovnice –
$ax+by+c=0$, kde $\vec{n} = (a,b)$ je normálový vektor priamky, $\vec{n}\perp\vec{u}$,
3) **smernicový tvar** rovnice –
$y = kx+q$, kde $k = \operatorname{tg}\alpha$ je smernicou priamky, q je úsek, ktorý vytína priamka na osi y.

Vzájomná poloha dvoch priamok:
Priamka p je určená bodom A a smerovým vektorom $\vec{u}$, priamka q je určená bodom B a smerovým vektorom $\vec{v}$. Ich vzájomnú polohu určíme podľa schémy:



Uhol dvoch priamok:

$$\cos\alpha = \frac{|u_1v_1 + u_2v_2|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|},$$

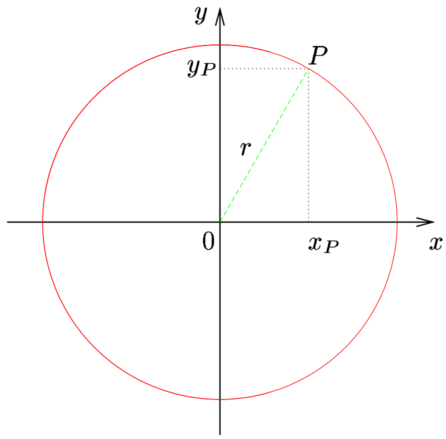
kde $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2+u_2^2}$, $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2+v_2^2}$.

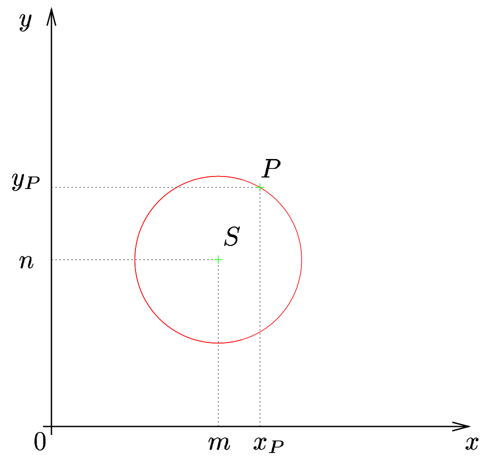
Vzdialenosť bodu $M = [x_0, y_0]$ od priamky $ax+by+c=0$:

$$v = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Kružnica

Stredový tvar rovnice kružnice $k(S;r)$, kde $P = [x,y]$ je jej ľubovoľný bod, $S = [0,0]$ je stred, $r = |SP|$ je polomer kružnice, je: $x^2 + y^2 = r^2$.
Ak $S = [m,n]$ je stred, potom rovnica kružnice je: $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$.





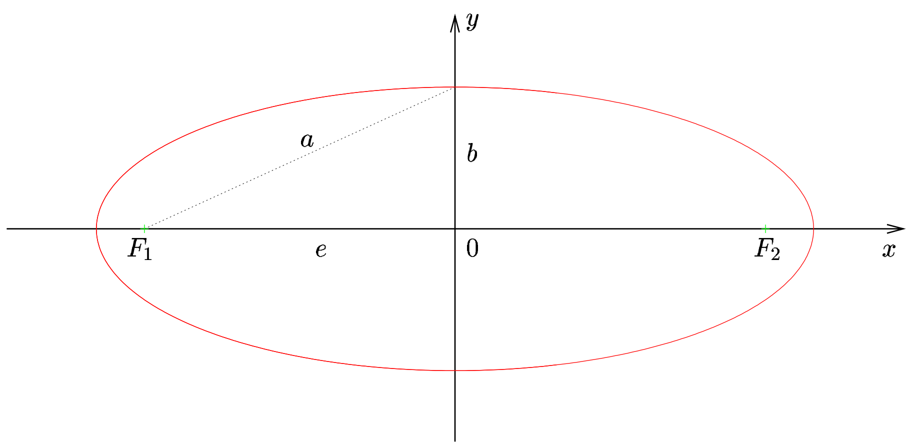
Elipsa

Stredový tvar rovnice elipsy, kde $P = [x,y]$ je jej ľubovoľný bod, je:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad S = [0,0], \quad a^2 > b^2,$$

alebo

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1, \quad S = [m,n], \quad a^2 > b^2.$$



$e = \sqrt{a^2 - b^2}$ – lineárna excentricita elipsy.
Ohniská elipsy: $F_1 = [-e,0]$, $F_2 = [e,0]$.

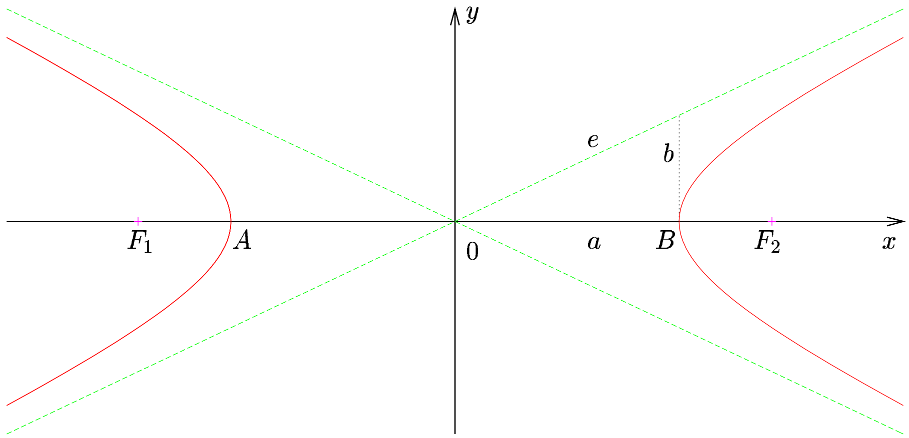
Hyperbola

Stredový tvar rovnice hyperboly, kde $P = [x,y]$ je jej ľubovoľný bod, je:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad S = [0,0],$$

alebo

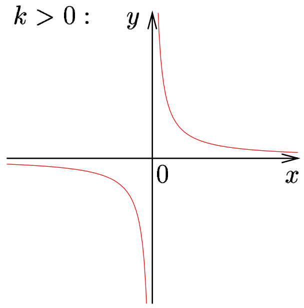
$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1, \quad S = [m,n].$$



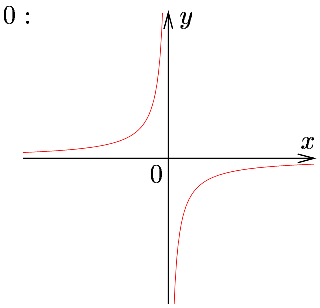
$e=\sqrt{a^2+b^2}$ – lineárna excentricita hyperboly.
Ohniská hyperboly: $F_1=[-e,0]$, $F_2=[e,0]$.
A, B – vrcholy hyperboly.
Asymptoty hyperboly majú rovnice: $y=\frac{b}{a}\cdot x$, $y=-\frac{b}{a}\cdot x$.

Rovnoosová hyperbola $y=\dfrac{k}{x}$,

$k>0:$



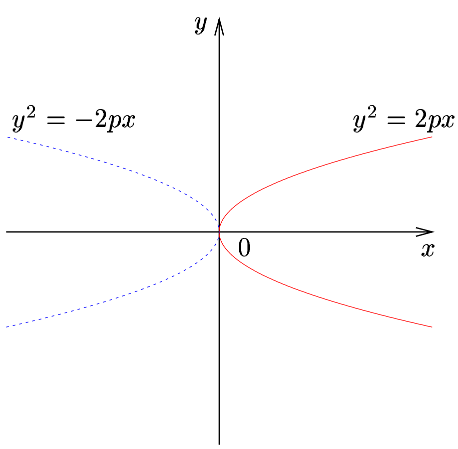
$k<0:$

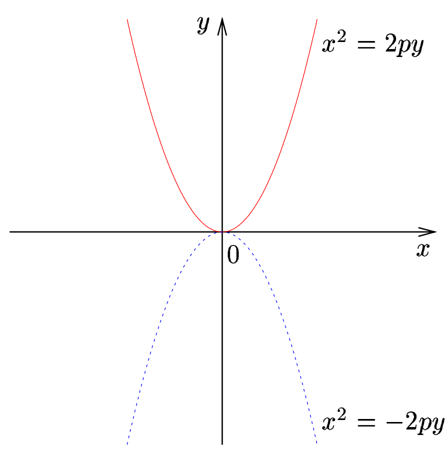


Parabola

Vrcholový tvar rovnice paraboly, kde $P=[x,y]$ je jej ľubovoľný bod, je:

$$\begin{aligned}
y^2 &= \pm 2px, \quad \text{kde } p>0,\ V=[0,0],\ o=x,\\
x^2 &= \pm 2py, \quad \text{kde } p>0,\ V=[0,0],\ o=y,\\
(y-n)^2 &= \pm 2p(x-m), \quad \text{kde } p>0,\ V=[m,n],\ o\parallel x,\\
(x-m)^2 &= \pm 2p(y-n), \quad \text{kde } p>0,\ V=[m,n],\ o\parallel y.
\end{aligned}$$





Derivačné vzorce:

$[c]' = 0,$ kde c je konštanta;

$[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1};$

$[e^x]' = e^x$

$[a^x]' = a^x \ln a;$

$[\ln x]' = \frac{1}{x};$

$[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a};$

$[\sin x]' = \cos x;$

$[\cos x]' = -\sin x;$

$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x};$

$[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x};$

$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$[\arccos x]' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}};$

$[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2};$

$[\operatorname{arccotg} x]' = \frac{-1}{1+x^2};$

$[c \cdot f(x)]' = cf'(x);$

$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x);$

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$

$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$

$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x);$

Integračné vzorce:

$\int dx = x + C;$

$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ pre $\alpha \neq -1;$

$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ pre $a \neq 1;$

$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C;$

$\int \cos x \, dx = \sin x + C;$

$\int \sin x \, dx = -\cos x + C;$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C;$

$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + C;$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C, \\ -\arccos \frac{x}{a} + C; \end{cases}$

$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C;$

$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arccotg} \frac{x}{a} + C; \end{cases}$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C;$

$\int c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int f(x) \, dx,$ kde $c \neq 0;$

$\int [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx;$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C;$

$\int f'(x) \cdot g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \, dx;$